https://www.modscires.pro/index.php/msr/article/view/msr06-01-074
DOI: 10.30889/2523-4692.2018-06-01-074

**УДК 004.2**

# METRIC CHARACTERISTICS OF FRACTAL GRAPHS

## МЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФРАКТАЛЬНЫХ ГРАФОВ

**Reznikov A.V. / Резников А.В.**
*c.p-m.s. / к.ф.-м.н.*
*Adyghe State University, Russia, Maykop, st.Pervomayskaya 208*
*Адыгейский государственный университет, Россия, Майкоп, ул.Первомайская 208*

***Аннотация.*** *Работа посвящена исследованию свойств фрактальных графов. Получены верхние и нижние оценки диаметра и радиуса фрактальных графов, в траектории которых смежность старых ребер сохраняется, порожденных затравками, удовлетворяющими условию Оре.*

***Ключевые слова:*** *фрактальный граф, диаметр графа, радиус графа, затравка.*

Основными рассматриваемыми объектами данной работы являются канонические фрактальные (предфрактальные) графы.

Определению фрактального графа предшествуют дополнительные определения и понятия.

Термином затравка условимся называть какой-либо фиксированный связный n-вершинный граф $H = (W, Q)$ с непомеченными вершинами.

Определим операцию замещения вершины затравкой (ЗВЗ), которая является обобщением операции расщепления вершины графа. Суть операции ЗВЗ состоит в следующем. В данном графе $G = (V, E)$ у намеченной для замещения вершины $v_0$ выделяется ее окружение $U_0$ и множество ребер $R_0$, инцидентных вершине $v_0$.

Определим некоторое отображение $\phi$ множества вершин $U_0$ во множество вершин затравки $W$: $\phi: U_0 \to W$.

После этого, у каждого ребра $e = v_0u$ из множества $R_0$ конец $v_0$ заменяется на определяемую отображением $\phi$ вершину $v = \phi(u)$ затравки $H$. «Старое» ребро $e = v_0u$ удаляется из графа $G$ и появляется в нем в «новом» измененном виде $e' = vu$.

Множеством вершин получаемого графа является множество $V \cup W \setminus \{v_0\}$ (рисунок 1).

Определим поэтапный процесс выполнения операции ЗВЗ. На этапе $s = 1$ затравку $H$ обозначаем как граф $G_1 = (V_1, E_1)$.

Пусть выполнены этапы $1, 2, \dots, l$, и по завершению этапа $l$ получен граф $G_l = (V_l, E_l)$, который назовем фрактальным графом. На этапе $l + 1$ для каждой

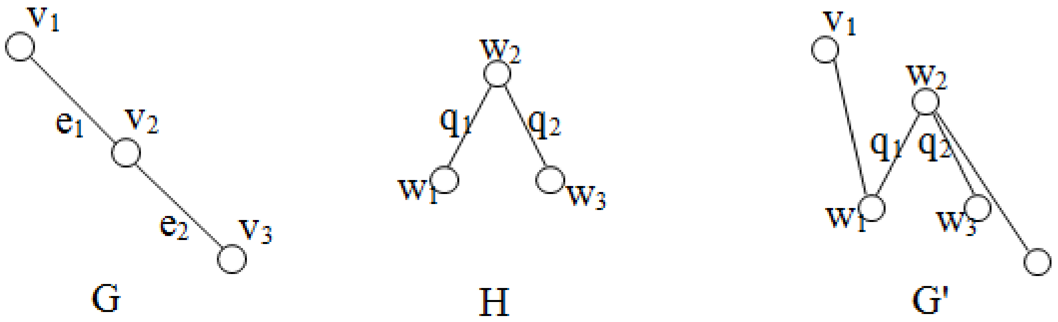


**Рис. 1. Применение операции ЗВЗ к графу $G$ и затравке $H$**

вершины $v$ ($v \in V_l$) осуществляется операция ЗВЗ, т.е. замещение каждой вершины затравкой $H$. В процессе выполнения всех операций ЗВЗ на данном этапе все ребра $e \in E_l$ сохраняются и называются старыми ребрами по отношению ко всем графам $G_{l+1}, G_{l+2}, \dots, G_L$, где $L > 1$. Причем, старые ребра, инцидентные замещаемой вершине $v \in V_l$, становятся, случайным или регулярным образом, инцидентными некоторым вершинам затравки, заместившей вершину $v$. Ребра каждой из таких появившихся затравок называют новыми ребрами, т.е. множество всех новых ребер есть множество $E_{l+1} \setminus E_l$.

Далее будем рассматривать фрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, порожденный произвольной $n$-вершинной затравкой $H = (W, Q)$.

Рассмотрим траекторию $G_l = (V_l, E_l), l = \overline{1, L}$ построения фрактального графа $G_L$.

**Определение.** Фрактальным графом, в траектории которого старые ребра сохраняют смежность, называется фрактальный граф $G_L = (V_L, E_L)$, такой, при поэтапной генерации которого, в процессе выполнения каждой операции ЗВЗ каждого этапа $s$ ($s = \overline{1, L-1}$) старые ребра сохраняют смежность.

Будем говорить, что $n$-вершинный граф $H_0$ удовлетворяет условию Оре, если для любой пары его вершин $v_1$ и $v_2$ выполняется условие $\rho(v_1) + \rho(v_2) \geq n$, где через $\rho(v)$ обозначена степень вершины $v$.

**Теорема 1** Пусть $G_L$ — фрактальный граф, в траектории которого смежность старых ребер сохраняется, $H$ — $n$-вершинная затравка, породившая $G_L$, $H$ удовлетворяет условию Оре, тогда для диаметра графа верна следующая верхняя оценка $d(G_L) \leq d(H) \cdot (2L-1)$.

**Теорема 2** Пусть $G_L$ — фрактальный граф, в траектории которого смежность старых ребер сохраняется, $H$ — $n$-вершинная затравка, породившая $G_L$, $H$ удовлетворяет условию Оре, тогда для диаметра графа верна следующая нижняя оценка $d(G_L) \geq 2L - 1 + d(H) - 1$.

**Теорема 3** Пусть $G_L$ — фрактальный граф, в траектории которого смежность старых ребер сохраняется, $H$ — $n$-вершинная затравка, породившая $G_L$, $H$ удовлетворяет условию Оре, тогда для радиуса графа верна следующая верхняя оценка $r(G_L) \leq (L-1)d(H) + r(H)$.

**Теорема 4** Пусть $G_L$ — фрактальный граф, в траектории которого смежность старых ребер сохраняется, $H$ — $n$-вершинная затравка, породившая $G_L$, $H$ удовлетворяет условию Оре, тогда для радиуса графа верна следующая нижняя оценка $r(G_L) \geq L \cdot r(H)$.

**Теорема 5** Пусть $G_L$ — фрактальный граф, в траектории которого смежность старых ребер сохраняется, $H$ — $n$-вершинная затравка, породившая $G_L$, $H$ удовлетворяет условию Оре, степень каждой вершины затравки $H$ меньше $n-1$, тогда радиус графа можно найти по формуле $r(G_L) = 2L$.

**Заключение и выводы**

В статье исследуются метрические характеристики фрактальных графов, в траектории которых смежность старых ребер сохраняется, порожденных затравкой, удовлетворяющей условию Оре. Получены оценки диаметра $2L - 1 + d(H) - 1 \leq d(G_L) \leq d(H) \cdot (2L-1)$ и радиуса $L \cdot r(H) \leq r(G_L) \leq (L-1)d(H) + r(H)$ фрактальных графов.

**Литература**

1. Лекции по теории графов / В.А. Емеличев [и др.]. – М.: Наука, 1990. – 384 с.

2. Кочкаров, А.М. Распознавание фрактальных графов. Алгоритмический подход. / А. М. Кочкаров. – Нижний Архыз: РАН САО, 1998.

3. Резников, А.В. Алгоритм распознавания предфрактальных графов с регулярной N-вершинной затравкой степени не менее N/2 [текст] / А.В. Резников, А.А. Кочкаров // Экологический вестник научных центров черноморского экономического сообщества. – Краснодар, 2010. – Выпуск 2. – С. 63-69.

4. Резников, А. В. Распознавание предфрактальных графов с затравкой, удовлетворяющей условию Оре, при условии, что смежность «старых» ребер в траектории предфрактального графа сохраняется [текст] / А. В. Резников // Вестник Адыгейского государственного университета. – Майкоп, 2011. – Выпуск 1. – С. 25-33.

***References:***

1. Lectures on graph theory / Emelichev [et al.]. - Moscow: Science, 1990. – 384 p.
2. Kochkarov, A. M. Detection of fractal graphs. Algorithmic approach. / A. M. Kochkarov. – Nizhniy Arkhyz: Sao RAS, 1998.
3. Reznikov, V. A. algorithm of recognition of the pre-fractal graphs regular graphs with N-vertex seed degree at least N/2 [text] / A. V. Reznikov, A. A. Kochkarov // Ecological Bulletin of scientific centers of the black sea economic community. - Krasnodar, 2010. - Issue 2. - P. 63-69.
4. Reznikov, A. V. Recognition of pre-fractal graphs graphs with a primer satisfying the ore condition, provided that the contiguity of the old edges in the trajectory graph remains pre-fractal graphs [text] / A. Reznikov, V. // Bulletin of Adyghe state University. - Maykop, 2011. - Issue 1. - P. 25-33.

***Abstract.*** *The work is devoted to the study of the properties of fractal graphs. Upper and lower estimates of the diameter and radius of fractal graphs are obtained, in the trajectory of which the adjacency of the old edges is preserved, generated by seedings satisfying the ore condition.The work is devoted to the study of the properties of fractal graphs. Upper and lower estimates of the diameter and radius of fractal graphs are obtained, in the trajectory of which the adjacency of the old edges is preserved, generated by seedings satisfying the ore condition.*

***Key words:*** *fractal graph, graph diameter, graph radius, seed.*