https://www.modscires.pro/index.php/msr/article/view/msr06-01-029
DOI: 10.30889/2523-4692.2018-06-01-029

УДК 681.3

COMMUNICATION NETS WITH VARIABLE TOPOLOGY

КОММУНИКАЦИОННЫЕ СЕТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ТОПОЛОГИЕЙ

Dubrovina T.V./Дубровина Т.В.
Ph.D., associate professor / к.ф.-м.наук, доцент
Vladimir State University named after Alexander Grigorievich and Nikolai Grigorievich Stoletovs
Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых

Аннотация. *В работе рассматриваются коммуникационные сети p2p с переменной топологией, т.е. тот случай, когда связи между узлами хаотично меняются. В зависимости от вероятности активности связей между узлами дается ответ на принципиальный вопрос: будет ли данная сеть связной, т.е. существует ли маршрут из данного узла в любой другой узел.*

Ключевые слова: *коммуникационная сеть, топология сети, связная сеть*

Вступление.

Коммуникационная сеть Net с математической точки зрения представляет собой ориентированный граф $(V,\vec{E})$. Вершины $v \in V$ этого графа называются *узлами*, а ребра, т.е. элементы множества $\vec{E},$ называются *связями.*

В данной работе рассматривается *симметричная сеть,* -- это тот случай, когда для любой связи $v-u,$ связь $u-v$ также имеет место. Тогда разумно перейти к неориентированному графу (V,E), ассоциированному с сетью Net.

В коммуникационных сетях передачи пакетированной информации с изменяющейся топологией первоначальным вопросом перед построением маршрутизации является вопрос связности сети, т.е. принципиальной возможности добраться из любого узла в любой другой узел. Коммуникационная сеть с множеством узлов V и потенциально возможными связями E изначально конструируется связной. Пусть $\deg$ -- средняя степень узлов сети, а p -- вероятность потенциальной связи $e \in E$ быть активной в какой-либо момент времени. Тогда средняя степень узла уменьшается до величины $p \cdot deg$. Мы рассматриваем так называемые маргинальные сети без супервизора – узла, в который мгновенно стекается вся информация о топологии сети. Таким образом, актуальным является вопрос о прогнозе связности сети (V,E) с заданной средней степенью узлов M. Рассматривается модель сети с N узлами в которой для каждой пары различных узлов $i,j \in V$ связь $e(i,j)$ существует с вероятностью $\frac{M}{N-1}$ и не существует с дополнительной вероятностью $1-\frac{M}{N-1}$. Легко подсчитать, что это обеспечивает среднюю степень узла равную M. Такие сети допускают простое компьютерное моделирование.

Вычисление вероятности связности сети.

Обозначим через Q вероятность того, что между выделенной парой различных узлов i и j не существует маршрута их соединяющего. Через q_k обозначим вероятность события состоящего в том, что между парой узлов i и j не существует маршрута длины k (сеть симметрична, т.е. граф сети неориентирован). Согласно построению сети, $q_1 = 1-\frac{M}{N-1}$. Ясно также, что $q_k = 1$, если $k \geq N$, ибо наибольшая возможная длина маршрута в графе с N вершинами равна $N-1$. Следовательно,

$$Q = \prod_{k=1}^{\infty} q_k = q_1 q_2 \dots q_{N-1} \tag{1}$$

Далее, перебирая всевозможные маршруты длины k, а их $(N-2)\dots(N-k-1)$, находим по теореме умножения вероятностей

$$q_k = \left(1-\frac{M^k}{(N-1)^k}\right)^{(N-2)\dots(N-k-1)} \tag{2}$$

Для того, что сеть была связной необходимо, что для любой пары узлов (а их $N(N-1)$ штук) существовал маршрут их соединяющий. Обозначив вероятность связности сети через C, получаем

$$C = (1-Q)^{N(N-1)} \tag{3}$$

ТЕОРЕМА 1. Если $M > \frac{e}{2} \approx 1.35$, то $\lim_{N\to\infty} R = 1$, тем самым с большой долей вероятности при большом количестве узлов (N>1000) данная сеть связна.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\lim_{N\to\infty} N(N-1)Q = 0$. Положим $N = 2u+1$ и оценим $N(N-1)q_u = (2u+1)2u\left(1-\left(\frac{M}{2u}\right)^u\right)^{(2u-1)\dots(2u-u)}$. Точнее, оценим логарифм этой величины:

$$\ln N(N-1)q_u = \ln(2u+1) + \ln 2u + (2u-1)\dots u \ln\left(1-\left(\frac{M}{2u}\right)^u\right)$$

Оценим последнее слагаемое в этой сумме с учетом эквивалентности $\ln(1+\alpha) \sim \alpha$ имеющей место для любой бесконечно малой величины α.

$$(2u-1)\ldots u\ln\left(1-\left(\frac{M}{2u}\right)^u\right)\sim$$

$$\sim\frac{-(2u-1)!\cdot M^u}{(u-1)!\cdot(2u)^u}\sim\frac{-\sqrt{2\pi(2u-1)}(2u-1)^{2u-1}e^{-2u+1}\theta_1 M^u}{\sqrt{2\pi(u-1)}(u-1)^{u-1}e^{-u+1}\theta_2(2u)^u}$$

Здесь использована формула Стирлинга, величины θ_i эквивалентны единице и далее мы их писать не будем. Продолжим преобразования с точностью до эквивалентности

$$-(2u-1)\ldots u\ln\left(1-\left(\frac{M}{2u}\right)^u\right)\sim\frac{\sqrt{2}(2u-1)^{2u-1}e^{-u}M^u}{(u-1)^{u-1}(2u)^u}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(2u-1)^{2u}e^{-u}M^u(u-1)}{(u-1)^u(2u)^u(2u-1)}=$$

$$=\sqrt{2}\cdot\left(\frac{(2u-1)^2}{(u-1)2u}\right)^u\cdot\left(\frac{M}{e}\right)^u\cdot\frac{1}{2}\sim\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 2^u\cdot\left(\frac{M}{e}\right)^u=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{2M}{e}\right)^u$$

Так как $2M>e$, то главной частью бесконечно большой величины $\ln N(N-1)q_u$ будет $-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{2M}{e}\right)^u$. Это доказывает, что $\lim_{N\to\infty}\ln N(N-1)q_u=-\infty$. Из этого следует, что $\lim_{N\to\infty}N(N-1)q_u=0$. Так как все q_j ограничены, то отсюда получаем равенство: $\lim_{N\to\infty}N(N-1)Q=0$.

Теорема доказана.

Одного общего утверждения о связности сети недостаточно. Хорошо бы иметь представление о длине кратчайшего маршрута из i в j.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $M=M_0\sqrt[k]{N}$ для некоторой константы M_0. Тогда $\lim_{N\to\infty}(1-q_{k+1})=1$, $\lim_{N\to\infty}(1-q_k)=1-e^{-M_0^k}$, $\lim_{N\to\infty}(1-q_{k-1})=0$,

т.е. с большой надежностью кратчайший маршрут из узла в другой узел имеет длину либо k либо $k+1$ при большом количестве узлов.

Доказательство. Из (2) получаем

$$\ln q_k\sim-\frac{M_0^k\cdot N\cdot(N-2)\ldots(N-k-1)}{(N-1)^k}\sim-M_0^k\xrightarrow{yields}\lim_{N\to\infty}q_k=e^{-M_0^k}$$

$$\ln q_{k+1}\sim-\frac{M_0^{k+1}\cdot N\cdot\sqrt[k]{N}\cdot(N-2)\ldots(N-k-2)}{(N-1)^{k+1}}\sim-M_0^{k+1}\sqrt[k]{N}\Rightarrow\lim_{N\to\infty}q_{k+1}=0$$

$$\ln q_{k-1}\sim-\frac{M_0^{k-1}\cdot N\cdot(N-2)\ldots(N-k)}{\sqrt[k]{N}\cdot(N-1)^{k-1}}\sim-\frac{M_0^k}{\sqrt[k]{N}}\Rightarrow\lim_{N\to\infty}q_{k-1}=1$$

что и требовалось доказать.

Возвратимся к ситуации теоремы 1, в которой предполагается, что M константа и утверждается вероятностная связность сети. На практике такой связности не будет, так как для любой фиксированной длины маршрута k имеет место соотношение

$$\ln q_k \sim -\frac{M^k \cdot (N-2)\dots(N-k-1)}{(N-1)^k} \sim -\frac{M^k}{N} \Rightarrow \lim_{N\to\infty} q_k = 1$$

показывающее, что длины вероятных маршрутов находятся на бесконечности.

Заключение и выводы.

Был поставлен и решен вопрос о связности коммуникационной сети передачи данных в зависимости от вероятности активности связи между двумя узлами. При условии, когда средняя степень узлов равна $M_0\sqrt[k]{N}$ (N -- объем сети) оценивается средняя длина маршрута, соединяющая два данных узла

Литература:

1. Бертсекас, Д. Сети передачи данных: пер. с англ. / Д. Бертсекас, Р. Галлагер – М.: Мир, 1989. – 544с., ил. – ISBN 5-03-000639-7.

References:

1. Bertsekas D., Gallager R. Data networks. ISBNN 013-196825-4

Abstract. *Communication nets with variable topology were investigated. This is precisely the case when connection between two points change chaotically. The answer on the principal question was given: is the net connect? It meens does it exists a root between two points of the net? The answer depends on the probability of activity connection between two points of the net..*

Key words: *communication nets, topology of a net, connect nets.*