https://www.modscires.pro/index.php/msr/article/view/msr05-01-048
DOI: 10.30889/2523-4692.2018-05-01-048

УДК 51-7(075.8)

EVALUATION OF THE BANRKUPCY PROBABILITY AND OPTIMAL INSURANCE RATE IN CASE OF WEIBULL DISTRIBUTION

ОЦІНКА ЙМОВІРНОСТІ БАНКРУТСТВА ТА ОПТИМАЛЬНА СРАХОВА СТАВКА У ВИПАДКУ РОЗПОДІЛУ ВЕЙБУЛА

ChornyyR.O. / Чорний Р.О.
aspr. / аспр.
Bilynskyi A.Ya. / Білинський А.Я.
aspr. / аспр.
Kinash O.M. / Кінаш О.М.
PhD, doc. / канд.фіз.-мат.н., доц.
IvanFranko National University of Lviv,Lviv,
1,UniversytetskaSt., 79000
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів,
Вул..Університетська 1, 79000

Аннотація. *Розглянуто задачу знаходження асимптотики ймовірності банкрутства у випадку великих виплат розподілених за субекспоненційними законами, зокрема у випадку розподілу Вейбула. Також знайдено асимптотичне співвідношення для оптимальної страхової ставки при виконанні ряду припущень у страховій моделі.*

Ключові слова: *асимптотика ймовірності банкрутства, важкі хвости, субекспоненційні розподіли, страхова ставка, розподіл Вейбула, факторизаційна модель.*

Вступ

Роботу страхової компанії характеризують різні показники, одним з яких є її імовірність банкрутства. Можна говорити про те, що фінансовий ризик і пов’язана з ним небезпека банкрутства – характерні особливості роботи кожної страхової компанії. Відтак, важливим завдання є обчислення імовірності банкрутства та аналіз отриманих результатів. Особливий інтерес, у наш час, становить визначення ймовірності банкрутства у випадку великих виплат, що пов’язане, зокрема, зі стихійними лихами, терористичними актами і т.д. У цій статті ми розглянемо саме цей випадок, коли виплати великі. Зауважимо також, що великі виплати описуються розподілами з так званими «важкими хвостами».

При аналізі таких розподілів, а зокрема розподілу Парето, виникло питання, чи можливо отримати оцінку ймовірності банкрутства $\phi(u)$.

Позитивну відповідь дали на це питання фон Бахр [1] для розподілу Парето, Торін і Вікстад [2] для лог-нормального розподілу.

Пізніше виникло питання, чи існує такий клас розподілів з «важкими хвостами», що допускає знаходження ймовірності банкрутства. Відповідь на це питання дали Ембрехтс та Веревербеке [3], що виявили фундаментальну роль для теорії ризику класу субекспоненційних розподілів *S*, до якого належать, зокрема, лог-нормальний розподіл, розподіл Парето, розподіл Барра, лог-гамма розподіл, зрізаний стійкий розподіл, розподіл Вейбулла, розподіли Бектандера типу I та типу II.

Постановка задачі

Отримати оцінку ймовірності банкрутства $\phi(u)$ у випадку вимог про виплати розподілених за законом Вейбулла. Визначити у цьому випадку оптимальну страхову премію, яка забезпечує умову небанкрутства.

Основна частина

Припустимо, що ми знаходимось в умовах класичної задачі знаходження ймовірності банкрутства (див. зокрема [4] ст. 184-186, [5] ст. 223-224).

Класичну модель колективного ризику характеризують:

1. Розміри виплат – $\{X_i, i \geq 1\}$ – невід'ємні незалежні однаково розподілені випадкові величини із функцією розподілу $F(x)$ та скінченним математичним сподіванням $\mu = EX_1$.

2. Моменти надходження вимог на виплати $\{T_i, i \geq 1\}$, що утворюють послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин з функцією розподілу $F(x)$.

3. Процес надходження вимог на виплати $N(t) = sup\{n \geq 1 : T_n \leq t\}$, $t > 0$,тобто кількість вимог на інтервалі $[0, t]$, де, за визначенням, sup{∅}=0.

4. Проміжки часу між надходженням вимог $Y_1 = T_1$, $Y_k = T_k - T_{k-1}$, $k \geq 2$ – незалежні однаково розподілені випадкові величини зі скінченним математичним сподіванням $EY_1 = 1/\lambda$.

5. $u \geq 0$ – початковий (резервний) капітал.

6. $c > 0$ – швидкість (інтенсивність) надходження страхових внесків.

Нехай

1) $\phi(u, T) = P\ \{U(t) < 0$ для деякого $0 < t \leq T\ \}$, $0 < t < \infty$, $u > 0$– імовірність банкрутства на скінченному часовому інтервалі $[0, T]$, $U(t)$ - процес ризику;

2) $\phi(u) = \phi(u, \infty) = P\ \{U(t) < 0$ для деякого $t > 0\}$ – імовірність банкрутства на нескінченному інтервалі.

Для обчислення імовірності банкрутства нам зручно мати прості аналітичні формули для $\phi(u)$ або $\phi(u, T)$, які включають імовірнісні характеристики розмірів страхових виплат та процесу надходження вимог на виплати $N(t)$.

Застосовуватимемо наступні терміни та позначення: якщо $F(x)$– функція розподілу, то через $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ позначаємо «хвіст» розподілуF, а через F^{n*} – n-кратну згортку F.

Отже, якщо F– функція розподілу розміру виплат, то $\bar{F}(x)$ – «хвіст» цього розподілу, а

$F_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \bar{F}(y)\,dy, x > 0,$

називають проінтегрованим «хвостом» розподілу. [4,ст.186]

Величину $\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$ називають відносною страховою надбавкою, а для базової умови $\rho > 0$ вживають термін «умова чистого прибутку».

Умова Крамера-Лундберга передбачає існування константи ν, яку називають налагоджувальним (регулюючим, коректуючим) коефіцієнтом або коефіцієнтом Лундберга, такої, що

$$\int_0^\infty e^{\nu x}(1 - F(x))dx = c/\lambda = (1+\rho)\mu, \tag{1}$$

Розподіли, що не задовольняють умову (1), будемо називати розподілами з «важкими хвостами» [4,ст.188]. До таких розподілів, як згадувалось вище, належать так звані субекспоненційні розподіли.

Для подальшої практичної реалізації підрахунку імовірності банкрутства використовуємо наступну теорему (див. зокрема [4, ст. 197]).

Теорема. Розглянемо модель Крамера-Лундберга за умов $\rho > 0$ та $F_I(x) \in S$. Тоді

$$\phi(u) \sim \rho^{-1}\overline{F_I}(u), u \to \infty \tag{2}$$

Згідно з даною теоремою, у випадку виплат, які мають розподіли із субекспоненційними проінтегрованими «хвостами», імовірність банкрутства допускає просту апроксимацію, що задається формулою (2).

Зауважимо, що умова теореми сформульована в термінах проінтегрованих «хвостів», а не самої функції розподілу $F(x)$.

Підрахунок імовірності банкрутства у випадку великих виплат

Нехай виплати розподілені за розподілом Вейбула. Тоді справдедливе наступне твердження [6].

Твердження. Нехай виплати розподілені за розподілом Вейбулла з параметром $0 < \gamma < 1$, з функцією розподілу

$$F(x) = 1 - exp(-c_1 x^\gamma), c_1 > 0, x > 0 \tag{3}$$

тоді асимптотика ймовірності банкрутства $\phi(u)$ задається співвідношенням

$$\phi(u) \sim \frac{\lambda}{c \cdot c_1^{\frac{1}{\gamma}} - \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)}\left[1 + \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}; c_1 x^\gamma\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\gamma}; 0\right)}{\gamma \cdot \Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}\right], \quad \text{при } u \to \infty. \tag{4}$$

Доведення. Щільність розподілу Вейбулла

$$f(x) = c_1 \gamma x^{\gamma-1} exp(-c_1 x^{\gamma})$$

Математичного сподівання $\mu = EX = \frac{1}{c_1^{1/\gamma}} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right)$

Відносна страхова надбавка

$$\rho = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 = \frac{c \cdot c_1^{\frac{1}{\gamma}}}{\lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)} - 1 = \frac{c \cdot c_1^{\frac{1}{\gamma}} - \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}{\lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}.$$

Тоді

$$\rho^{-1} = \frac{\lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}{c \cdot c_1^{\frac{1}{\gamma}} - \lambda\Gamma\left(1+\frac{1}{\gamma}\right)}.$$

Проінтегрований хвіст розподілу

$$F_I(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x \overline{F}(y)dy, \quad x > 0.$$

Зауважимо, що у класичному інтегральному визначенні гамма-функції межі інтегрування фіксовані. Розглядають також неповну гамма-функцію, яка визначається аналогічним інтегралом із змінною верхньою або нижньою межею інтегрування. Розрізняють верхню неповну гамма-функцію, часто позначають як гамма-функцію від двох аргументів.

$$\Gamma(a, z) = \int_z^{\infty} e^{(-t)} t^{a-1} dt$$

Тоді, отримаємо

$$\int_0^x \overline{F}(y)dy = \int_0^x \exp\left(-c_1 y^{\gamma}\right)dy = \frac{c_1^{-\frac{1}{\gamma}}\left(\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}; c_1 x^{\gamma}\right) - \Gamma\left(\frac{1}{\gamma}; 0\right)\right)}{\gamma}.$$

Нагадаємо, що $\Gamma(a, z) = \int_z^{\infty} e^{(-t)} t^{a-1} dt$

Звідки легко видно, що для розподілу Вейбулла (3) виконується твердження (4).

Формула для оптимальної страхової ставки в умовах факторизаційної моделі та за умов виплат, що мають розподіл Вейбула.

За умови виплат розподілених за розподілом Вейбула та при виконанні умов факторизаційної моделі [7] знайдено асимптотичну поведінку оптимальної страхової ставки.

Будемо вважати, що кількість договорів страхування *N*, які знаходяться в страховому портфелі, є випадковою величиною. Кожному договору страхування з номером *j* ставиться у відповідність величина S_j яку називаємо страховою сумою. Нехай Y_j - величина позову за j -м договором. Очевидно, що $Y_j \le S_j$. Введемо $X_j = \dfrac{Y_j}{S_j}$. Випадкову величину X_j назвемо відносним позовом (позовом, що розрахований на одиницю страхової суми).

Будемо також вважати, що випадкові величини X_j та S_j - незалежні. Зауважимо, що в цьому полягає суть F-моделі [7,с.248]. Зрозуміло, що величина позову може бути представлена у вигляді

$$Y_j = X_j S_j \tag{5}$$

Позови, які задовольняють умову (5) назвемо факторизованими [7].

Припустимо, також, що для кожного договору страхування страхова премія Z_j визначається

$Z_j = zS_j$

де z - деяка стала для всіх договорів страхування(страхова ставка). Зауважимо, що в розглянутій моделі премії є випадковими величинами, що залежать від S_j, що і відрізняє її від класичних постановок задачі.

Будемо вважати, що всі позови факторизовані, випадкові вектори (S_j, X_j) і випадкова величина *N* незалежні в сукупності. Сума премій зібраних по страховому потрфелю рівна

$$\overline{Z} = \sum_{j=1}^{N} Z_j$$

сума позовів рівна

$$\overline{Y} = \sum_{j=1}^{N} Y_j$$

Якщо початковий капітал рівний u_0, то кінцевий страховий фонд рівний

$$U = u_0 + \overline{Z} - \overline{Y} \tag{6}$$

Перша задача пов’язана з моделлю (6) є задача вивчення асимптотики розподілу випадкової величини *U* при відомій величині страхової ставки *z*.

Друга задача – визначення такого мінімального значення *z*, при якому результати страхової діяльності по даному портфелю є прийнятними для страховика.

Для визначення страхової ставки z введемо наступні умови :

$$z \ge EX_j \tag{7}$$

(умова "середньої беззбитковості")

$$P(U \ge 0) \ge Q \tag{8}$$

де Q - деяке наперед задане число $(0 < Q < 1)$, (умова "кінцевого небанкрутства").

Якщо ставка страхової премії z забезпечує виконання умов (7) і (8) будемо називати її "достатньою". Через z_0 позначимо точну нижню грань величини z, таку величину будемо називати оптимальною страховою ставкою.

Для спрощення записів будемо вважати, що випадкова величина S розподілена так само, як і випадкова величина S_j, випадкова величина X – так само, як і випадкова величина X_j. Нехай випадкова величина S має не менше двох скінченних моментів.

Коефіцієнт варіації випадкової величини S позначимо символом V,

$$V^2 = \frac{DS}{(ES)^2} = \frac{ES^2}{(ES)^2} - 1.$$

Покладемо $H_j = S_j(z - I_j K_j)$, причому випадкові величини H_j незалежні і однаково розподілені. Тоді згідно з [7]

$$U = u_0 + \sum_{j=1}^{N} H_j$$

та для будь-якого u_0

$$P(U < x) = P(\sum_{j=1}^{N} H_j < x - u_0)$$

Символом $\Phi(x)$ будемо позначати стандартну нормальну функцію розподілу, а символом $\Psi(x)$ – функцію, обернену до функції $\Phi(x)$. Для спрощення будемо вважати, що $u_0 = 0$, N – стала величина, Y_j – задовольняють (1).

Тоді $U = \sum_{j=1}^{N} H_j$. Будемо припускати також, що N достатньо велика, щоб розподіл U апросктимувати нормальним законом.

Припустимо далі, що позови за договорами страхування є великими. Такі розміри виплат більш адекватно описуються випадковими величинами, які мають розподіли з «великими хвостами», до числа яких належить зокрема розподіл Вейбула з параметром $0 < \gamma < 1$, з функцією розподілу:

$$F(x) = 1 - exp(-c_1 x^{\gamma}), c_1 > 0, x > 0$$

Якщо X має розподіл Вейбула, то

$$A = EX = \frac{1}{c_1{}^{1/\gamma}} \cdot \Gamma\left[1 + \frac{1}{\gamma}\right]$$

$$B = DX = \left(\frac{1}{c_1{}^{1/\gamma}}\right)^2 \cdot \left(\Gamma\left[1 + \frac{2}{\gamma}\right] - \left\{\Gamma\left[1 + \frac{1}{\gamma}\right]\right\}^2\right)$$

Тоді при цих припущеннях для z_0 - оптимальної страхової ставки справедливе наступне співвідношення :

$$z_0 \sim \frac{1}{{c_1}^{1/\gamma}} \cdot \Gamma\left[1+\frac{1}{\gamma}\right] + \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{{c_1}^{1/\gamma}}\right)^2 \cdot \left(\Gamma\left[1+\frac{2}{\gamma}\right] - \left\{\Gamma\left[1+\frac{1}{\gamma}\right]\right\}^2\right)}\,[1+V^2]^{1/2}\Psi(Q)}{[N - V^2\Psi^2(Q)]^{1/2}}$$

Зауважимо також, що при V=0 даний результат практично зводиться до класичного [7,ст.238].

Отже, отримана формула дає асимптотику оптимальної страхової ставки у випадку F-моделі для відносних позовів розподілених за розподілами Вейбула. Зауважмо, що для розподілу Парето подібний результат отримано в [8].

Література:

1. Von Bahr B. Asymptotic ruin probabilities when exponential moments do not exist. // Scand. Actuarial J.- 1975.- N 1.- P. 6-10.

2. Thorin O., Wikstad N. Calculation of ruin probabilities when the claim distribution is lognormal. // Astin Bulletin.- 1976.- Vol. 9. - P. 231-246.

3. Embrechts P., Veraverbeke N. Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. // Insurance: Math.Econ.- 1982.- Vol. 1.- N 1.- P. 55-72.

4. Зінченко Н. М. Математичні методи в теорії ризику: навчальний посібник. // Н. М. Зінченко. – К.: ВПЦ “Київський університет”, 2008. – 224 с.

5. Леоненко М. М. Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці. // М. М. Леоненко, Ю. С. Мішура, В. М. Пархоменко, М. Й. Ядренко. – К. : Інформтехніка, 1995. – 380 с.

6. Білинський А. Оцінка ймовірності банкрутства у випадку виплат розподілених за субекспоненційними законами. // Вісник Львівського університету. Серія прикладна математика та інформатика. Випуск 25, 2017. - С. 56-63

7. Королев В.Ю. Математические основы теории риска. // В.Ю.Королев, В.Е.Бенинг, С.Я.Шоргин , - М.: Физматлит. 2011, - 620с.

8. Чорний Р.О. Одна задача визначення оптимальної страхової премії / Чорний Р.О., Білинський А.Я. // Научные труды SWorld. – 2017 – випуск №47, Том 2. – С. 68 – 71

References:

1. Von Bahr B. Asymptotic ruin probabilities when exponential moments do not exist. // Scand. Actuarial J.- 1975.- N 1.- P. 6-10.

2. Thorin O., Wikstad N. Calculation of ruin probabilities when the claim distribution is lognormal. // Astin Bulletin.- 1976.- Vol. 9. - P. 231-246.

3. Embrechts P., Veraverbeke N. Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. // Insurance: Math.Econ.- 1982.- Vol. 1.- N 1.- P. 55-72.

4. Zinchenko N.M. Mathematical methods in risk theory: a tutorial - publishing center "Kyiv

University", - 2008.

5. Leonenko M. M. Theoretical-probabilistic and statistical methods in econometrics and financial mathematics / M. M. Leonenko, Yu. S. Mishura, V. M. Parkhomenko, M. Ya. Yadrenko. - Kyiv: Informtekhnika, 1995.

6. Bilinsky A. Assessment of the probability of bankruptcy in the event of payment distributed by subexponential laws.// Visnyk of the Lviv Univertsity. Series applied mathematics and computer science.

7. Korolev V.Y. Mathematical foundations of risk theory./ V.Y.Korolev, V.E.Bening, S.Y.Shorgin. – M.:Fizmatlit, 2011. – 620 p.

8. Chistyakov V.P. A theprem on sums of irv and its applications to branching processes / V.P. Cgistyakov // Teor. Probabiliyu Appl. – 1969. –N 9 – P. 640-648.

Abstract. *Considered the problem of the asymptotic probability of bankruptcy for large payments distributed by subexponential laws, especially in case of Weibull distribution. Also, it is found an asimptotic ratio for optimal insurance rate by implementing a row of assumptions in insurance model*

Key words: *asymptotics of the probability of bankruptcy, "heavy tails", subexponential distributions, insurance rate, Pareto distribution, factorization model*

Науковий керівник: канд.фіз.-мат.н., доц. Кінаш О.М.

Статья відправлена: 25.09.2018 г.