PHYSICS AND MATHEMATICS
ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА

https://www.modscires.pro/index.php/msr/article/view/be4-218-054
DOI: 10.30889/2523-4692.2018-04-01-054

УДК 537.612

RECEIVE THE FORMULA OF ENERGY OF INTERACTION OF CURRENT COILS FOR DIFFERENT CONFIGURATIONS

ПОЛУЧЕНИЕ ФОРМУЛЫ ЭНЕРГИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТОКОВЫХ ВИТКОВ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Nadrshina Y. K./Надршина Я.К.
student / студент
Lapin N. I./Лапин Н.И.
c.ph-mat.s. / к.физ.-мат.н., доц.
ORCID: 0000-0003-4075-4731
SPIN: 9807-5690
Нижегородский государственный педагогический университет имени К.Минина, Нижний Новгород, ул.Ульянова, 1, 604950

Аннотация: *В данной работе рассматривается система взаимодействия токовых витков. На основе данной системы, была получена универсальная формула для энергии взаимодействия двух и более токовых витков при различной конфигурации. Также рассмотрены частные случаи применения данной формулы.*

Ключевые слова: *энергия взаимодействия, круговые токи*

Вступление.

На сегодняшний день магнитные поля являются неотъемлемой частью нашей жизни. Работа многих приборов и процессов основывается на электромагнитных явлениях. В свою очередь ряд задач электродинамики приводит к проблеме связи краевых условий для двух и большего числа тел. В этом случае возникают трудности из-за необходимости решения граничной задачи математической физики со сложной конфигурацией границы. Следовательно, возникает проблема описания взаимодействия в наиболее удобной форме для исследования.

Целью данной работы являлось вывести универсальную формулу для энергии взаимодействия двух и более токовых витков при различной конфигурации.

Вывод формулы энергии взаимодействия двух токовых витков

Для вывода формулы взаимодействия рассмотрим два витка с током и найдем силу взаимодействия данных витков (рис. 1). Каждый из проводников создает магнитное поле, которое действует по закону Ампера на другой проводник с током. Рассмотрим, с какой силой действует магнитное поле тока I_1 на элемент dl второго проводника с током I_2. Ток I_1 создает вокруг себя магнитное поле, запишем выражение для вектора $\vec{B}$:

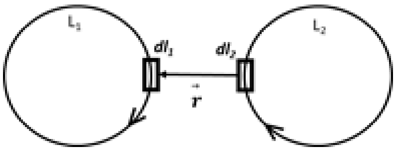


Рисунок 1. Взаимодействие двух витков.

$$d\vec{B}_1 = kI_1 \frac{[\vec{dl} \times \vec{r}]}{|r|^3} \quad (1)$$

$$d\vec{B}_2 = kI_2 \frac{[\vec{dl} \times \vec{r}]}{|r|^3} \quad (2)$$

Для определения силы взаимодействия двух токов применим закон Ампера, тогда сила взаимодействия проводников равна:

$$d\vec{F}_{12} = kI_1[\vec{dl} \times \vec{dB_2}] = kI_1 \frac{[\vec{dl_1} \times \times [I_2 \vec{dl_2} \times \vec{r}]]}{|r|^3} = kI_1I_2[\vec{dl_1} \times [\vec{dl_2} \times \vec{r}]] \quad (3)$$

$$\vec{F_{12}} = \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{kI_1I_2}{|r|^3} [\vec{dl_1} \times [\vec{dl_2} \times \vec{r}]] \quad (4)$$

$$\vec{F_{12}} = kI_1I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{[\vec{dl_1} \times [\vec{dl_2} \times \vec{r}]]}{|r|^3} \quad (5)$$

Рассмотрим подробно векторное произведение

$$\vec{F_{12}} = kI_1I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} \left(\vec{dl_1} \left(\vec{dl_2}, \frac{\vec{r}}{|r|^3} \right) - \frac{\vec{r}}{|r|^3} (\vec{dl_1}, \vec{dl_2}) \right) \quad (6)$$

Первое слагаемое в интеграле является полным дифференциалом по dl_1и не дает вклада, так как путь интегрирования замкнут.

$$\vec{F_{12}} = kI_1I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} \left(- \frac{\vec{r}}{|r|^3} (\vec{dl_1}, \vec{dl_2}) \right) \quad (7)$$

$$\vec{F_{12}} = -kI_1I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{\vec{r}}{|r|^3} (\vec{dl_1}, \vec{dl_2}) \quad (8)$$

Линейные интегралы берутся здесь вдоль контуров токов, r— радиус-вектор, проведенный от элемента длиныdl_2к dl_1, как показано на рисунке 2.

Введем единичный вектор $\frac{\vec{r}}{r} = \vec{r}_0$

$$\vec{F_{12}} = -kI_1I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{\vec{r}}{r} \frac{(\vec{dl_1}, \vec{dl_2})}{r^2} = -\vec{r}_0 kI_1I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{(\vec{dl_1}, \vec{dl_2})}{r^2} \quad (9)$$

Рассмотрим силу, как взятый с обратным знаком градиент потенциальной энергии U, тогда

$$\vec{F_{12}} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial r} \vec{r}_0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -kI_1I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{(\vec{dl_1}, \vec{dl_2})}{r^2} \text{(11)} \oint_{L_1} \oint_{L_2}$$

Проинтегрируем выражение 11 и найдем значение энергии

$$U = -kI_1I_2 \int_r \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{(\vec{dl_1}, \vec{dl_2})}{r^2} dr = -kI_1I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} \int_r \frac{(\vec{dl_1}, \vec{dl_2})}{r^2} dr =$$

$$-kI_1I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} \int_r \frac{dr}{r^2} (\vec{dl_1}, \vec{dl_2})$$

(12)

$$U = -kI_1I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{(\vec{dl_1}, \vec{dl_2})}{r} \quad (13)$$

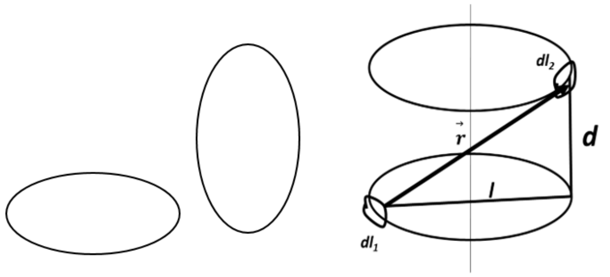
В выражении 13 интегрирование производится по обоим контурам L_1 и L_2, причем каждый элемент длины dl_1 контура L_1 должен быть скалярно помножен на каждый элемент dl_2 контура L_2 и полученное произведение разделено на расстояние между элементами. Выражение 13 является универсальной формулой расчета энергии взаимодействия двух и более токовых витков при различной конфигурации.

Энергия взаимодействия двух параллельных токовых витков

Проверим работу данной формулы на примере взаимодействия двух токовых витков расположенных, как показано на рис. 2.

Если рассмотреть случай, изображенный на рисунке 2а, можно сразу сделать вывод о том, что энергия взаимодействия будет равна 0, так как $\cos\alpha = 0$

Рассмотрим второй случай, изображённый на рис. 2б. В данном случае система двух тонких витков, расположенных в параллельных плоскостях на расстоянии d друг от друга, центры которых лежат на одной оси. Сравним расчет энергии взаимодействия с помощью формулы 20 и стандартным способом нахождения энергии.



а) Система двух витков, расположенных в перпендикулярных плоскостях   б) Система двух витков, расположенных в параллельных плоскостях

Рисунок 2. Два параллельных витка с током

Расчет энергии взаимодействия стандартным способом

Токи I_1 и I_2 создают вокруг себя магнитное поле, запишем выражение для векторов $\vec{B}_{1,2}$:

$$d\vec{B}_1 = kI_1 \frac{[\vec{dl}_1 \times \vec{r}]}{|r|^3} = kI_1 \frac{\vec{dl}_1 r_{12} \sin(\vec{dl}_1, \vec{r})}{|r|^3} \quad (14)$$

$$\overrightarrow{dB}_2 = kI_2 \frac{[\vec{dl}_2 \times \vec{r}]}{|r|^3} = kI_1 \frac{\vec{dl}_2 r_{12} \sin(\vec{dl}_2, \vec{r})}{|r|^3} \quad (15)$$

Исходя из выражений 3, 8, запишем результат для силы взаимодействия витков, где sina=1–угол между элементом dl_1 и вектором магнитной индукции $\vec{B}_1$

$$\overrightarrow{dF_{12}} = I_1 B_2 dl_1 \sin\alpha = I_1 dl_1 kI_2 \frac{l_2}{|r|^3} \sin\alpha \quad (16)$$

$$\overrightarrow{F_{12}} = kI_1 I_2 \frac{l_1 l_2 \sin\alpha}{|r|^3} = kI_1 I_2 \frac{l_1 l_2}{|r|^3} \quad (17)$$

Рассмотрим силу, как взятый с обратным знаком градиент потенциальной энергии U, на основе выражений 10-13 получим значение энергии взаимодействия двух витков. Из геометрических параметром заменим $r = \sqrt{d^2 + l^2}$ (18), где d-расстояние между витками, l–диаметр нижнего кольца.

Тогда энергия взаимодействия витков будет иметь вид:

$$\boldsymbol{U = -kI_1 I_2 l_1 l_2 \int \frac{dr}{r^2} = \frac{kI_1 I_2 l_1 l_2}{r} = \frac{kI_1 I_2 l_1 l_2}{\sqrt{d^2 + l^2}}} \qquad (19)$$

Расчет энергии взаимодействия с помощью полученной формулы

Применим формулу 20 и найдем энергию взаимодействия данных витков. Угол между элементами dl_1 и dl_2 равен 0, следовательно, косинус угла между элементами dl_1 и dl_2 равен 1. С учетом этого раскроем скалярное произведение данных элементов

$$\boldsymbol{U} = -\boldsymbol{k I_1 I_2} \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{(\overrightarrow{dl_1}, \overrightarrow{dl_2})}{r} = -kI_1 I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{dl_1\, dl_2 \cos\alpha}{r} = kI_1 I_2 \oint_{L_1} \oint_{L_2} \frac{dl_1\, dl_2}{r} \qquad (20)$$

С учетом геометрических параметров, проинтегрируем выражение 20.

$$U = kI_1 I_2 \frac{l_1 l_2}{\sqrt{d^2 + l^2}} \qquad (21)$$

Результат расчета по полученной формуле полностью совпал с результатом расчета стандартным способом, что подтверждает правильность и применимость данной формулы.

Заключение и выводы.

В ходе работы была получена универсальная формула для расчета энергии взаимодействия токовых витков для различных конфигураций. Данная формула была проверена на частном случае, результат расчета по данной формуле полностью совпал с теоретическим расчетом стандартным методом. При этом расчет по формуле занял значительно меньше времени, что говорит о ее эффективности. Стоит учесть, что данную формулу можно легко преобразовать для системы соленоидов.

Литература

1. Тамм И.Е. Основы теории электричества:Учебное пособие для вузов.–11 изд. испр. и доп. –М.: ФИЗМАТЛИТ,2003.

2. Смайт В. Электростатика и электродинамика –М.: ИЛ, 1954.

3. Стреттон Дж.А. Теория электромагнетизма. М.: ГИТТЛ, 1948. –540 2006.

4. Ю.М. Урман, Н.И. Лапин Теорема сложения для тензорных решений уравнения Гельмгольца // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 5 (1), с. 137–143

Abstract. *In this paper we consider the system of interaction of current coils. On the basis of this system, a universal formula for the interaction energy of two or more current coils in different configurations was obtained. The special cases of application of this formula are also considered.*

Key words: energy of interaction, circular currents

References:

1. Tamm I. E. fundamentals of the theory of electricity: a textbook for universities.-11 ed. ISPR. and DOP. - M.: FIZMATLIT, 2003.

2. Smythe V. Electrostatics and electrodynamics –M.: IL, 1954.

3. Stretton John.A. theory of electromagnetism. M.: gittl, 1948. -540 2006.

4. Yu. M. Urman, N. So. Lapin addition Theorem for tensor solutions of Helmholtz equation / / Bulletin of Nizhny Novgorod University. N. And. Lobachevskogo, 2011, no. 5 (1), pp. 137-143